Variable Compleja

Matemáticas VI, Guía #4

Preparado, resuelto y tipeado en $\LaTeX$ por Axel Voza

La mayoría de los ejercicios que aquí aparecen corresponden a los problemas de final de capítulo de un par de referencias bibliográficas poco comunes, por lo que debe considerarse ésta como una guía de apoyo adicional solamente. Téngase en cuenta que los ejercicios están (aproximadamente) en el orden que ocupan en el programa del curso, pero no están en absoluto en orden de complejidad. Sin embargo, si se debe advertir que los ejercicios (hasta que se mejore esta versión) ruedan entre las dificultades de medio-alto y alto.

En los ejercicios 1-29 se repiten algunos de los tópicos que se estudiaron como ejercicios de la guía anterior, pero se agregan por completitud. El lector con algunas fallas en la primera parte de Variable Compleja está invitado a pensar en estos ejercicios.

A menos que se diga lo contrario, las variables z y w denotan variables complejas, y es costumbre poner $z = x + y\mathrm{i}$ y $w = u + v\mathrm{i}$. Si z es real puro se denotará $x \in \mathbb{R}$ y si w es imaginario puro se denotará $w \in \mathrm{i}\mathbb{R}$.

1. Expresar las cantidades en la forma $a + b\mathrm{i}$, donde a y b son reales:

   (a) $(1+\mathrm{i})^3$

   (b) $\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$

   (c) $\operatorname{cis}(\pi/2)$

   (d) $\mathrm{e}^2 \operatorname{cis}(\pi/4)$

   (e) $\operatorname{sen}(\pi/4 + 2\mathrm{i})$

   (f) $\cosh(2 + \pi\mathrm{i}/4)$

2. Expresar $z_1 = 1 + \cos\theta + \mathrm{i}\operatorname{sen}\theta$ y $z_2 = -\operatorname{sen}\theta + \mathrm{i}(1+\cos\theta)$ en la forma $\rho \operatorname{cis}\phi$.

3. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, demostrar que $\dfrac{\lambda - z}{\lambda - \bar{z}}$ siempre tiene modulo la unidad.

4. Simplificar al máximo las expresiones:

   (a) $\cos\theta + \mathrm{i}\operatorname{sen}\theta + \dfrac{1}{\cos\theta + \mathrm{i}\operatorname{sen}\theta}$

   (b) $(1 + \cos\theta + \mathrm{i}\operatorname{sen}\theta)(1 + \cos\theta - \mathrm{i}\operatorname{sen}\theta)$

   (c) $\dfrac{1 - \cos\theta + \mathrm{i}\operatorname{sen}\theta}{1 + \cos\theta + \mathrm{i}\operatorname{sen}\theta}$

   (d) $(\cos\theta + \mathrm{i}\operatorname{sen}\theta)(\operatorname{sen}\theta + \mathrm{i}\cos\theta)$

5. Si $z = \cos\theta + \mathrm{i}\operatorname{sen}\theta$, hallar en la forma más simplicada posible:

   (a) z^2

   (b) $1/z$

   (c) $1 + z$

   (d) $\dfrac{1}{1-z}$

6. Si $z_n = (1 + \mathrm{i}\sqrt{3})^n$, demostrar que $x_{n-1}y_n - x_n y_{n-1} = 4^{n-1}\sqrt{3}$.

7. Demostrar que $(4 + 5\mathrm{i})(2 - 3\mathrm{i}) = 23 - 2\mathrm{i}$, y descomponer así $23 + 2\mathrm{i}$ en factores complejos. Deducir que

$$(4^2 + 5^2)(2^2 + 3^2) = 23^2 + 2^2 \ .$$

¿Se deduce de esta técnica que toda suma de cuadrados es igual al producto de dos pares de sumas de cuadrados para números enteros?

8. Con intenciones parecidas a las del problema anterior, sean $z = a + b\mathrm{i}$ y $w = c + d\mathrm{i}$. Usar la factorización en cuatro factores complejos de $|zw|^2$ y su expresión explícita para demostrar la *identidad de Lagrange*:

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 \; .$$

Usar esta misma técnica para expresar $(t^2 + 1)(x^2 + 1)(y^2 + 1)$ como suma de dos cuadrados.

9. Usando la identidad de Euler, concretamente la identidad $(\cos\theta + \mathrm{i}\operatorname{sen}\theta)^5 = \cos 5\theta + \mathrm{i}\operatorname{sen} 5\theta$, expresar $\cos 5\theta$ en función de $\cos\theta$ y $\dfrac{\cos 5\theta}{\cos\theta}$ en función de $\operatorname{sen}\theta$. Deducir entonces que

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \; .$$

10. Si $y = 2\cos\theta$, demostrar que $2\cos 7\theta = y^7 - 7y^5 + 14y^3 - 7y$. Hallar además la ecuación cúbica cuyas raíces son

$$4\cos^2\frac{\pi}{14} \; , \quad 4\cos^2\frac{3\pi}{14} \; \text{ y } \; 4\cos^2\frac{5\pi}{14} \; .$$

Finalmente, resolviendo la ecuación $\cos 7\theta = 0$, demostrar que

$$\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{14} + \operatorname{sen}^2\frac{3\pi}{14} + \operatorname{sen}^2\frac{5\pi}{14} = \frac{5}{4} \; .$$

11. † En este ejercicio se analizan algunas propiedades del “segundo” número complejo de mayor importancia, la raíz cúbica primitiva de la unidad $\omega = \operatorname{cis}\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

(a) Demostrar que ω satisface las ecuaciones siguientes:

i. $1 + \omega + \omega^2 = 0$ y $\overline{\omega} = \omega^2$.
ii. $(1 + \omega)(1 + \omega^2) = 1$.
iii. $(1 + \omega^2)^3 = -1$.
iv. $(1 + \omega)(1 + 2\omega)(1 + 3\omega)(1 + 5\omega) = 21$.

(b) Demostrar que $1 + \omega^n + \omega^{2n}$ es igual a 3 o a cero, dependiendo que n sea o nó divisible por 3.

(c) Demostrar que en la expresión $a + b\omega + c\omega^2$ se pueden reordenar los coeficientes a, b, c al multiplicarla por ω y por ω^2. Deducir entonces que todo polinomio en ω es escencialmente un polinomio de grado no mayor que 2 en ω, es decir:

$$\sum_{k=0}^{3n-1} a_k\omega^k = (a_0 + a_3 + \ldots + a_{3n-3}) + (a_1 + a_4 + \ldots + a_{3n-2})\,\omega + (a_2 + a_5 + \ldots + a_{3n-1})\,\omega^2 \; .$$

(d) Notando que la identidad

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 - ab + b^2) = (a - b)(a + b\omega)(a + b\omega^2)$$

proporciona una factorización de $a^3 - b^3$ en términos de ω, demostrar la identidad

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = (a + b\omega + c\omega^2)(a + b\omega^2 + c\omega) \; .$$

Deducir que si $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$, entonces $a - b = \omega(c - b)$ ó $a - b = \omega^2(c - b)$.

(e) Si no está claro el significado geométrico de lo demostrado en la parte anterior, aquí lo planteamos; demostrar que los puntos $a, b, c \in \mathbb{C}$ son los vértices de un triángulo equilátero si y sólo si $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$.

(f) Usar algunos de los resultados anteriores para demostrar que el *determinante circulante* de tercer orden siguiente presenta la factorización

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega) .$$

12. Repetir algunos de los estudios que se hicieron en la pregunta anterior para demostrar que si $\eta^7 - 1 = 0$ (tal $\eta \neq 1$ define la raíz séptima primitiva de la unidad), entonces las expresiones

$$\eta + \eta^6 \ , \ \eta^2 + \eta^5 \text{ y } \eta^3 + \eta^4$$

tienen valores reales. Usar esto para demostrar que el *polinomio ciclotómico* de sexto grado definido por $p(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ acepta la factorización

$$p(x) = \left(x^2 - 2x\cos\frac{2\pi}{7} + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos\frac{4\pi}{7} + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos\frac{6\pi}{7} + 1\right) .$$

13. Hallar las constantes complejas a, b tales que se verifique la descomposición en fracciones simples

$$\frac{1}{x^2+1} = \frac{a}{x - \mathrm{i}} + \frac{b}{x + \mathrm{i}} ,$$

y usar este resultado para encontrar una fórmula cerrada para $\dfrac{d^n}{dx^n}(\arctan x)$. (Pueden suponerse válidas las reglas de derivación con coeficientes complejos.)

14. Usando la factorización $x^4 + x^2 + 1 = (x^2+1)^2 - (\sqrt{2}x)^2$, usar descomposición en fracciones simples de para resolver la integral

$$\int \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1}\, dx.$$

15. Hallar el lugar geométrico que describe z si éste se restringe por medio de las ecuaciones siguientes:

(a) $|z| = 2$

(b) $|z + \mathrm{i}| = |z - \mathrm{i}|$

(c) $|z - 1| = 2|z + 1|$

(d) $z = \overline{z}$

(e) $\arg\left(\dfrac{z-1}{z+\mathrm{i}}\right) = \pi$

(f) $|z - 1| + |z + 1| = 4$

(g) $|z + \mathrm{i}| - |z - \mathrm{i}| = 3$

(h) $|z - a|^2 + |z - b|^2 = c^2$ $(a, b \in \mathbb{C})$

(i) $|z - a|^2 - |z - b|^2 = c^2$ $(a, b \in \mathbb{C})$

(j) $|z - 1| = a|z + 1| + b$, en los casos $(a, b) = (1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 3)$, $(3, 0)$ y $(-1, 3)$.

16. Sean $a, b \in \mathbb{C}$, $\alpha \in [0, 2\pi)$ y sea z un punto que describe el lugar geométrico de ecuación $\arg\left(\dfrac{z-a}{z-b}\right) = \alpha$. Demostrar que z satisface la ecuación $z\overline{z} - \overline{p}z - p\overline{z} - k = 0$, donde

$$p = \frac{\csc\alpha}{2\mathrm{i}}\left(a\,\mathrm{cis}(\alpha) - b\,\mathrm{cis}(-\alpha)\right) \ \text{ y } \ k = \mathrm{i}\csc\alpha\left(\mathrm{Re}(a\overline{b}\,\mathrm{cis}(\alpha)) + \mathrm{Im}(a\overline{b}\,\mathrm{cis}(\alpha))\right) .$$

(Este resultado muestra la forma general de una recta en términos de z y de constantes complejas, ya que se verá más adelante que la fracción $\dfrac{z-a}{z-b}$ es una recta o una circunferencia.)

17. † Si z se mueve sobre el segmento real $[-1, 1]$, hallar el lugar geométrico que describe el número $w = \dfrac{1 - \mathrm{i}z}{z - \mathrm{i}}$.

18. Hacer un dibujo de la región del plano complejo cuyos puntos z están dados por las condiciones siguientes:

(a) $|z| < 2$
(b) $|z+2| > 2$
(c) $\mathrm{Re}(z^2) < -1$
(d) $\mathrm{Im}(1/z) > 2$
(e) $z\overline{z} - (1+\mathrm{i})z - (1-\mathrm{i})\overline{z} > 2$
(f) $|z-1| + |z+1| \leq 4$
(g) $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right| < 2$
(h) $\left|\dfrac{z+2\mathrm{i}}{z-2\mathrm{i}}\right| \leq 1$

19. † Probar que las funciones $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$ son periódicas de período 2π, y que las funciones e^z, $\operatorname{senh} z$, $\cosh z$ lo son también, pero de período $2\pi\mathrm{i}$. ¿Cuáles son los períodos de las restantes funciones circulares e hiperbólicas?

20. Resolver las siguientes ecuaciones en $\mathbb{C}$:

(a) $\mathrm{e}^{-z} + 1 = 0$
(b) $\mathrm{e}^{z} + \mathrm{i} = 0$
(c) $4\cos z + 5 = 0$
(d) $\operatorname{senh}(\mathrm{i}z) + \mathrm{i} = 0$
(e) $\operatorname{sen} z = \mathrm{i}\pi$
(f) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos \pi x$
(g) $\mathrm{e}^{2z} + 2\,\mathrm{e}^{z} - 3 = 0$
(h) $\cosh z = \mathrm{i}$
(i) $\operatorname{lgn}(z+\mathrm{i}) = 0$
(j) $\operatorname{lgn}(\mathrm{i}-z) = 1$
(k) $\tanh(z+\mathrm{i}) = \mathrm{i}\tan(z-\mathrm{i})$
(l) $\sqrt{\mathrm{e}^{z} + \mathrm{i}} = 1$

21. Hallar todos los valores posibles de las siguientes cantidades en la forma $a + b\mathrm{i}$, y dígase en cada caso cuál es valor principal:

(a) $\operatorname{lgn}(1+\mathrm{i})$
(b) $\mathrm{i}^{3/4}$
(c) $(1+\mathrm{i})^{1/2}$

22. Expresar las cuatro raíces de $z^4 + 2z^2 + 2 = 0$ en la forma $a + b\mathrm{i}$.

23. Expresar todos los valores de la función $w(z) = z^{\pi}$ en la forma polar $\rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ y calcular los valores principales de $w((1+\mathrm{i})/\sqrt{2})$ en la forma $a + b\mathrm{i}$.

24. † Demostrar las siguientes fórmulas de inversión usan la determinación principal del logaritmo complejo:

(a) $\operatorname{arcsen} z = -\mathrm{i}\operatorname{lgn}\left(\mathrm{i}z + (1-z^2)^{1/2}\right)$
(b) $\arccos z = -\mathrm{i}\operatorname{lgn}\left(\mathrm{i}z + (z^2-1)^{1/2}\right)$
(c) $\arctan z = \dfrac{\mathrm{i}}{2}\operatorname{lgn}\dfrac{1-\mathrm{i}z}{1+\mathrm{i}z}$
(d) $\arg\operatorname{senh} z = \operatorname{lgn}\left(z + (z^2+1)^{1/2}\right)$
(e) $\arg\cosh z = -\mathrm{i}\operatorname{lgn}\left(z + (z^2-1)^{1/2}\right)$
(f) $\arg\tanh z = \dfrac{1}{2}\operatorname{lgn}\dfrac{1+z}{1-z}$

25. Usar el problema anterior para calcular todos los valores de las siguientes cantidades:

(a) $\operatorname{arcsen}(2)$
(b) $\arctan(2\mathrm{i})$
(c) $\arg\cosh(-1)$
(d) $\arg\tanh(-1+\mathrm{i})$

26. Sea $f : \mathbb{C}_{xy} \to \mathbb{C}_{uv}$ definida como $f(z) = z^2$. Hallar algebráicamente y dibujar $f(\Omega)$ en cada uno de los casos siguientes:

(a) $\Omega = \{\, z \mid |z| = r \,\}$
(b) $\Omega = \{\, z \mid y = \lambda x \,\}$ (véanse los casos $\lambda \to \pm\infty$)
(c) $\Omega = \{\, z \mid |z+1| - |z-1| = a \,\}$ (con $a > 0$)
(d) $\Omega = \{\, z \mid x = h \text{ ó } y = k \,\}$

27. Sean z_0 dentro del círculo unidad en el plano $\mathbb{C}_{xy}$ y $\alpha \in [-\pi, \pi)$. Sea $f : \mathbb{C}_{xy} \to \mathbb{C}_{uv}$ definida por

$$w = f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\,\frac{z - z_0}{1 - z\overline{z_0}}\,.$$

Demostrar que f satisface las siguientes propiedades:

(a) f transforma el círculo unidad $|z| = 1$ en el círculo unidad $|w| = 1$.

(b) $w(z_0) = 0$ y $\arg(w'(z_0)) = \alpha$; esta última igualdad dice que el ángulo de giro que f le aplica al segmento $\overline{Oz_0}$ es igual a α.

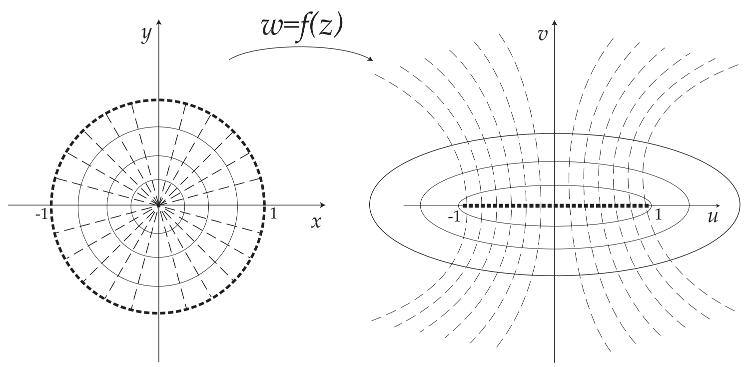
(*Observación*: Se puede demostrar más, a saber: las **únicas** transformaciones fraccionarias lineales que satisfacen estas dos propiedades son de la forma indicada en este problema, pero se necesitan propiedades de las transformaciones conformes que no vemos en este curso.)

28. Demostrar que si $w = \operatorname{sen} z$, entonces sus partes reales e imaginarias satisfacen

$$\frac{u^2}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{y^2}{\cos^2 x} = 1 \ \text{ y } \ \frac{u^2}{\cosh^2 y} + \frac{v^2}{\operatorname{senh}^2 y} = 1 \, .$$

Usar estas expresiones para dibujar las imágenes de la red ortogonal de rectas $\{\, x + y\mathrm{i} \mid x = h \ \text{ ó } \ y = k \,\}$ bajo $f(z) = \operatorname{sen} z$, y comprobar que dichas preimágenes también forman una red ortogonal.

29. Sea $w = f(z) = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ la *transformación de Zhukovski*. Demostrar, en la forma que indica el dibujo adjunto, que f transforma el interior del círculo $|z| = 1$ en todo el plano complejo cortado a lo largo del segmento real $-1 \leq u \leq 1$ (nótese que tal segmento se entiende como una elipse degenerada). Hallar las ecuaciones de las elipses que son imágenes de los círculos concéntricos $z = r\operatorname{cis}(\theta)$ (con $|r| < 1$) y las ecuaciones de las hipérbolas que son imágenes de los diámetros $\arg(z) = \alpha$ (con $-\pi \leq \alpha < \pi$).



30. Si $w = \tanh z$, demostrar que sus partes reales e imaginarias satisfacen

$$x^2 + y^2 - 2x\coth 2u + 1 = 0 \ \text{ y } \ x^2 + y^2 + 2y\cot 2v - 1 = 0 \, .$$

Usar estas expresiones para comprobar que cuando w se mueve a lo largo de las líneas de la red u =constante y v =constante, z describe dos familias de circunferencias. ¿Forman una red ortogonal dichas circunferencias?

31. Si $u(x, y) = 3x^2y - y^3$ es la parte real de una función analítica $w = f(z)$, hallar la parte imaginaria $v(x, y)$.

32. Probar que $u(x, y) = xy^2$ no puede ser la parte real de ninguna función analítica compleja.

33. Determinar si $w(x) = 2xy + \mathrm{i}\,(x^2 - y^2)$ es una función analítica.

34. Demostrar que las siguientes funciones de variable real son armónicas, y hallar (si es posible, por simple inspección) su conjugada armónica:

(a) $u(x, y) = x^2 + 2x - y^2$

(b) $u(x, y) = 2\,\mathrm{e}^x \cos y$

(c) $u(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$

(d) $u(x, y) = \cos x \cosh y$

(e) $u(x, y) = \arctan \dfrac{y}{x}$

(f) $u(x, y) = \operatorname{lgn}(x^2 + y^2)$

35. † Sean $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ armónicas en un conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$. Demostrar que las funciones

$$U(x,y) = \mathrm{e}^{u(x,y)} \cos(v(x,y)) \;\text{ y }\; V(x,y) = \mathrm{e}^{u(x,y)} \cos(v(x,y))$$

son armónicas, y de hecho, son mutuamente conjugadas armónicas. ¿Cuál es exactamente, en términos de $f(z) = u + \mathrm{i}v$, la función $F : D \to \mathbb{C}$ tal que $F(z) = U + \mathrm{i}V$?

36. † Usar la definición en serie de funciones apropiadas en cada caso para demostrar las siguientes identidades:

(a) $\mathrm{e}^{z+w} = \mathrm{e}^z \, \mathrm{e}^w$

(b) $\operatorname{lgn}(zw) = \operatorname{lgn} z + \operatorname{lgn} w$, si $-\pi \le \arg(zw) < \pi$

(c) $\operatorname{sen}(x + y\mathrm{i}) = \operatorname{sen} x \cosh y + \mathrm{i} \cos x \operatorname{senh} y$

(d) $\cos(x + y\mathrm{i}) = \cos x \cosh y - \mathrm{i} \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$

37. Usar la representación en serie geométrica

$$1 + t + t^2 + \ldots + t^n + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} t^k = \frac{1}{1-t}\,, \quad |t| < 1$$

para hallar las sumas de las series

$$S_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+z^n} - \frac{1}{1+z^{n-1}} \right) \quad , \quad S_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(1-z^n)(1-z^{n+1})}$$

(*Sugerencia*: Al menos en el segundo ejercicio, el ”truco” es multiplicar arriba y abajo por $(1-z)$, pero lo más importante es analizar la suma en los casos $|z| < 1$ y $|z| > 1$ por separado en cada ejercicio.)

38. Hallar la región de convergencia de las siguientes series de Laurent. En el caso de las geométricas, hallar la función a la cual converge la serie en dicho conjunto:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-\mathrm{i})^n z^n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2})^n}{z^n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{-n}}{\cos(\mathrm{i}n)}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^n}{(\mathrm{i}z)^n}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n (z+1)^n}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n 2^{-n}}{(z-2-\mathrm{i})^n}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 1}{(z+2\mathrm{i})^n}$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+1-\mathrm{i})^{-n}}{n+\mathrm{i}}$

39. Repetir el ejercicio anterior con las sgtes. series de Laurent-Taylor:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 (z-2+\mathrm{i})^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2+\mathrm{i})^n}{1+\mathrm{i}n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(z+1-\mathrm{i})^n} + \sum_{n=0}^{\infty} n(z+1-\mathrm{i})^n$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(\mathrm{i}n)}{(z-\mathrm{i})^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-\mathrm{i})^n}{n!}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4 z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n 2^n}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 1}{(z+1)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{(\mathrm{i}+n)^2}$

(g) $\displaystyle -\frac{\mathrm{i}}{2(z-\mathrm{i})} + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-\mathrm{i})^n}{(2\mathrm{i})^n}$

(h) $\displaystyle \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n$

(i) $\displaystyle -\frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n$

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{m} \frac{a^n}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{b^n}$

40. Desarrollar en serie de Lauernt en torno al punto $z_0 = 0$ a las sgtes. funciones, e indicar además en círculo de convergencia:

(a) $f(z)=\dfrac{\operatorname{sen} z}{z^2}$ (d) $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^z}{z^3}$ (g) $f(z)=\dfrac{1}{z}\operatorname{sen}^2\dfrac{1}{2z}$ (j) $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^z-1}{z}$

(b) $f(z)=\dfrac{\operatorname{sen}^2 z}{z}$ (e) $f(z)=z^3\,\mathrm{e}^{1/z}$ (h) $f(z)=\dfrac{1}{z^8}\operatorname{senh}(z^2)$ (k) $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^4}$

(c) $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^z}{z}$ (f) $f(z)=z^4\cos\dfrac{1}{z}$ (i) $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^2}$ (l) $f(z)=\dfrac{1-\mathrm{e}^{-z}}{z^3}$

41. Hallar la expansión en serie de Laurent de $f(z)=\dfrac{1}{(z-\mathrm{i})(z-3)}$, válida en el anillo $1<|z|<3$.

42. Demostrar que cuando $|r|<1$ (para r real), se tienen los desarrollos

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{n}\operatorname{sen} n\varphi=\arctan\frac{r\operatorname{sen}\varphi}{1-r\cos\varphi}\quad\text{y}\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{n}\cos n\varphi=-\frac{1}{2}\operatorname{lgn}(1-2r\cos\varphi+r^2)\,.$$

43. Los *números de Bernoulli* se definen como los coeficientes B_k que satisfacen el desarrollo en serie de Laurent

$$\frac{1}{\mathrm{e}^z-1}=\frac{1}{z}-\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{B_k}{(2k)!}z^{2k-1}\,.$$

Hallar los primeros términos de este desarrollo para calcular B_1, B_2 y B_3.

44. Sea $\omega\neq 1$ la raíz cúbica primitiva de la unidad estudiada en la pregunta § 11. Si $f(z)$ tiene un desarrollo de Taylor $\sum a_k x^k$, entonces

$$\frac{1}{3}\Big(f(x)+f(\omega x)+f(\omega^2 x)\Big)=\sum_{k=0}^{\infty}a_{3k}x^{3k}\,.$$

Deducir de este resultado y del desarrollo de las funciones trigonométricas y exponencial que los siguientes desarrollos son válidos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}\left(\mathrm{e}^x+2\,\mathrm{e}^{-x/2}\cos\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) &= 1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^9}{9!}+\ldots\\
\frac{1}{3}\left(\cos x+2\cos\frac{x}{2}\cosh\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) &= 1-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^{12}}{12!}-\frac{x^{18}}{18!}+\ldots\\
\frac{2}{3}\operatorname{senh}\frac{x}{2}\left(\cosh\frac{x}{2}-\cos\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) &= \frac{x^3}{3!}+\frac{x^9}{9!}+\frac{x^{15}}{15!}+\ldots
\end{aligned}$$

45. La pregunta anterior se puede generalizar estableciendo que si $\omega\neq 1$ satisface $\omega^n=1$ ($n\in\mathbb{N}$), entonces el desarrollo de Taylor de f de la forma $f(z)=\sum a_k x^k$ implica que

$$\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}f(\omega^m x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_{nk}x^{nk}\,.$$

Hágalo Ud. mismo, y diga a qué función converge (y en que región) la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^k}{(5k)!}+\frac{1}{5k+5}\right)x^{5k}$.

46. En esta pregunta se presenta a la función

$$P_r(\theta)=\frac{1}{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}\,,$$

llamada *núcleo de Poisson*, útil al estudiar convergencia de series de Fourier complejas.

(a) Defínase $P_r(\theta) := \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}$. Demostrar que esta serie converge absolutamente si $|r| < 1$.

(b) Usar la técnica de sumación de series geométricas para verificar lo que dice el enunciado; esto es

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta} = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2} \; .$$

(c) Demostrar que $P_r(\theta) \geq 0$, para cualquier $|r| < 1$ y $\theta \in [-\pi, \pi]$.

(d) Suponiendo convergencia uniforme (definición que se dá en Matemáticas avanzadas para permitir intercambio de series con integrales), demostrar que el núcleo de Poisson es una "medida de probabilidad" en el círculo; esto es:

$$\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta)\, d\theta = 1 \; .$$

(e) Esta parte es opcional, y serviría como información en caso de que el lector prefiera omitirla. Usando acotaciones sobre la definición de $P_r(\theta)$ dada al comienzo, demostrar que dados $\epsilon, \delta > 0$, existe r_0 tal que $0 < r_0 < r < 1$ tal que

$$\int_{-\pi}^{-\delta} P_r(\theta)\, d\theta + \int_{\delta}^{\pi} P_r(\theta)\, d\theta < \epsilon \; .$$

(*Observación*: Estas tres últimas propiedades definen lo que en teoría de análisis armónico (o teoría de distribuciones para los Físicos) se conoce como *aproximación de la identidad* (o *función de Dirac* para los Físicos).)

(f) Demostrar que

$$\frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2} = P_r(\theta - t) \; .$$

(g) Generalizar la definición de $P_r(\theta)$ para círculos arbitrarios de radio R, demostrando que

$$P_r(\theta) = \frac{1}{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos\theta + r^2} \quad \text{para} \;\; 0 \leq r < R \; .$$

(h) Usar las dos partes anteriores para deducir la siguiente acotación de $P_r(\theta)$ para $0 \leq r < R$:

$$\frac{1}{2\pi} \frac{R - r}{R + r} \leq P_r(\theta - t) \leq \frac{1}{2\pi} \frac{R + r}{R - r} \; .$$

47. † Sea $a \in \mathbb{C}$ fijo y sean γ_a una curva cerrada que rodea al punto a y γ_0 otra que no rodea al punto a. Demostrar directamente que

$$\int_{\gamma_0} (z - a)^n\, dz = 0 \; , \quad \forall\, n \in \mathbb{Z} \; ,$$

mientras que

$$\int_{\gamma_a} (z - a)^n\, dz = \begin{cases} 0 & , \quad n \neq -1 \\ 2\pi\mathrm{i} & , \quad n = -1 \end{cases} \; .$$

48. Calcular directamente, usando la definición de integral de línea, la integral $\displaystyle\int_\gamma z\, dz$, donde γ es la circunferencia unidad con centro en el origen.

49. Repetir la pregunta anterior para $\displaystyle\int_\gamma \operatorname{lgn} z\, dz$, donde se toma la determinación principal del logaritmo.

50. Evaluar la integral $\displaystyle\int_\gamma \frac{z - 1}{z^2 + \mathrm{i}z + 2}\, dz$ si γ es la curva de ecuación $x^4 + y^4 = 4$.

51. Usando **solamente** la fórmula integral de Cauchy (la versión estandar para la primera mitad de los ejercicios y la versión derivadas para la segunda mitad), calcular las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2+2z}\,dz$ (f) $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{\cos(z+\pi i)}{z(e^z+2)}\,dz$ (k) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3}\,dz$ (p) $\displaystyle\int_{|z-2|=3} \frac{\cosh(e^{i\pi z})}{z^3-4z^2}\,dz$

(b) $\displaystyle\int_{|z-i|=1} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\,dz$ (g) $\displaystyle\int_{|z|=5} \frac{dz}{z^2+16}$ (l) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\operatorname{senh}^2 z}{z^3}\,dz$ (q) $\displaystyle\int_{|z|=1/2} \frac{\cos\frac{\pi}{z+1}}{z^3}\,dz$

(c) $\displaystyle\int_{|z-1|=2} \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi z}{2}}{z^2+2z-3}\,dz$ (h) $\displaystyle\int_{|z|=4} \frac{dz}{(z^2+9)(z+9)}$ (m) $\displaystyle\int_{|z-1|=1} \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi z}{4}\,dz}{(z-1)^3(z-3)}$ (r) $\displaystyle\int_{|z-2|=1} \frac{e^{1/z}}{(z^2+4)^2}\,dz$

(d) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{\operatorname{sen}(iz)}{z^2-4z+3}\,dz$ (i) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\operatorname{senh}\frac{\pi}{2}(z+i)}{z^2-2z}\,dz$ (n) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z\operatorname{senh} z}{(z^2-1)^2}\,dz$ (s) $\displaystyle\int_{|z|=1/2} \frac{1-\operatorname{sen} z}{z^2}\,dz$

(e) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\tan z}{z\,e^{1/(z+2)}}\,dz$ (j) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{\operatorname{sen} z\operatorname{sen}(z-1)}{z^2-z}$ (o) $\displaystyle\int_{|z-3|=6} \frac{z\,dz}{(z-2)^3(z+4)}$ (t) $\displaystyle\int_{|z-1|=1/2} \frac{e^{iz}}{(z^2-1)^2}\,dz$

(*Ayuda*: Para integrandos de la forma $f(z)/p(z)$, cuyo denominador se anula en más de un valor en el interior de la curva, trabajar primero con la descomposición en fracciones simples de $1/p(z)$.)

52. † Sea γ la circunferencia de radio R centrada en el origen, y sean

$$f(z)=z^2-1\,,\quad g(z)=\frac{1}{z^2+1}\,.$$

(a) Usar la versión apropiada de la desigualdad triangular para demostrar que para $z\in\gamma$ se tiene que

$$R^2-1\le|f(z)|\le R^2+1\,,\quad \frac{1}{R^2+1}\le|g(z)|\le\frac{1}{R^2-1}\,.$$

(b) Deducir de la parte anterior que

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right|\le\pi R(R^2+1)\,,\quad \left|\int_\gamma g(z)\,dz\right|\le\frac{\pi R}{R^2-1}\,.$$

(c) Deducir también que

$$\left|\int_\gamma f(z)g(z)\,dz\right|\le\pi R\frac{R^2+1}{R^2-1}\,,$$

53. Hallar y clasificar las singularidades de las siguientes funciones:

(a) $\dfrac{z}{z^2+1}$ (c) $\operatorname{lgn}\left(1+z^2\right)$ (e) $\tan z$

(b) $\dfrac{1}{z^3+1}$ (d) $\left(z^2-3z+2\right)^{1/2}$ (f) $\arctan(z-1)$

54. Hallar el carácter del punto singluar $z=0$ para las siguientes funciones:

(a) $\dfrac{1}{z-\operatorname{sen} z}$ (c) $\dfrac{1}{e^{-z}+z-1}$ (e) $\dfrac{\operatorname{senh} z}{z-\operatorname{senh} z}$

(b) $\dfrac{1}{\cos z-1+z^2/2}$ (d) $\dfrac{\operatorname{sen} z}{e^{-z}+z-1}$ (f) $\dfrac{z(e^{z^2}-1)}{\cos z-\cos^2 z}$

55. Demostrar que la función $f(z)=\dfrac{1}{1+z^{1/2}}$ tiene un punto de ramificación doble, tal que en una rama no tiene polos, y en la otra, tiene un polo en $z=1$.

56. Determinar la naturaleza del punto infinito para las siguientes funciones:

(a) z^2
(b) $\dfrac{z}{z+1}$
(c) $z \operatorname{sen} \dfrac{1}{z}$
(d) $(1+z)^{1/2}$
(e) $(1+z^2)^{1/2}$
(f) $\operatorname{lgn}(1+z)$

57. Determinar el desarrollo de $f(z) = \mathrm{e}^{1/z}$ en serie de Laurent e indicar el conjunto de convergencia.

58. Repetir la pregunta anterior para la función $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2} = \dfrac{1/z^2}{1+1/z^2}$.

59. Si $a \in \mathbb{R}$, calcular los residuos de las funciones siguientes en cada uno de sus polos finitos, y en cada caso hallar la suma de esos residuos:

(a) $\dfrac{\mathrm{e}^z}{z^2+a^2}$
(b) $\dfrac{\mathrm{e}^{tz}}{z^3-a^3}$
(c) $\dfrac{1}{z^4-a^4}$
(d) $\dfrac{\operatorname{sen} z}{z^2}$
(e) $\dfrac{1-\cos z}{z^3(z-2\pi)}$
(f) $\dfrac{1+z^2}{z(z-1)^2}$
(g) $\dfrac{1+z}{z^2(z-a)^2}$
(h) $\dfrac{1}{(z^2+a^2)^2}$
(i) $\dfrac{az^2+2bz+c}{(z-z_1)(z-z_2)}$

60. † En este problema estudiamos el comportamiento de integrales y su residuo en el infinito.

(a) Demostrar que la transformación $w = 1/z$ transforma la circunferencia $\{\, |z| = R \,\}$ en la circunferencia $\{\, |w| = 1/R \,\}$, de modo que una vuelta positiva sobre una de ellas corresponde a una vuelta negativa sobre la otra.

(b) Usar el resultado anterior para probar que

$$\int_{|z|=R} f(z)\, dz = \int_{|w|=1/R} f\left(\frac{1}{w}\right) \frac{dw}{w^2}\,.$$

Definimos $\gamma_\infty = \lim_{R\to\infty} \{\, |z| = R \,\}$ como la circunferencia de centro en el infinito. Deducir de la igualdad anterior que $\int_{\gamma_\infty} f(z)\, dz$ es $2\pi\mathrm{i}$ veces el residuo de la función $\dfrac{1}{w^2} f\left(\dfrac{1}{w}\right)$ en $w = 0$.

(c) Se define el residuo de f en el infinito, cuando éste no es punto de ramificación ni singularidad escencial, como

$$\int_{\gamma_\infty} f(z)\, dz = -2\pi\mathrm{i} \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)\,,$$

correspondiendo el signo negativo al hecho que una vuelta positiva sobre γ_∞ se describe en sentido negativo con respecto al exterior de γ_∞. Usar el problema anterior para probar que

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -\operatorname*{Res}_{w=0} \frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right)\,.$$

(d) Deducir de la parte anterior que la suma de todos los residuos de f en el plano complejo, incluyendo el punto infinito, es cero. (*Observación*: Nótese que f puede tener un residuo no nulo en $z = \infty$, aunque sea analítica allí, si $z^2 f(z)$ tiene un polo en $z = \infty$.)

61. Si $a \in \mathbb{R}$, usar el resultado final del problema anterior para calcular de dos modos distintos

$$\int_\gamma \frac{a^2-z^2}{a^2+z^2} \frac{dz}{z}\,,$$

donde γ es cualquier contorno positivo que rodee a los puntos $z = 0$ y $z = \pm\mathrm{i}a$. Calcular también, usando solamente el residuo en el punto infinito, la integral

$$I = \int\limits_{|z|=3} \frac{z^{17}}{(z^2+2)^2(z^3+3)^4}\, dz \; .$$

62. Si a, b, m son reales positivos, comprobar los siguientes cálculos, por integración sobre contornos y/o el teorema del residuo (en el último problema debe ser $b^2 < ac$ y $n \in \mathbb{N}$):

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{2a}$

(b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+4a^4} = \frac{\pi}{8a^3}$

(c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{x^6+1}\, dx = \frac{\pi}{3}$

(d) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x\cos x}{x^2-2x+10}\, dx = \frac{\pi}{3}(\cos 1 - 3\,\mathrm{sen}\, 1)\,\mathrm{e}^{-3}$

(e) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x\,\mathrm{sen}\, x}{x^2+4x+20}\, dx = \frac{\pi}{2}(2\cos 2 + \mathrm{sen}\, 2)\,\mathrm{e}^{-4}$

(f) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\,\mathrm{sen}\, mx}{a^2+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{e}^{-am}$

(g) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}\, mx}{x(a^2+x^2)^2}\, dx = \frac{\pi}{4a^4}[2-(2+am)\,\mathrm{e}^{-am}]$

(h) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos 2ax - \cos 2bx}{x^2}\, dx = \pi(b-a)$

(i) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos mx\, dx}{(x-a)^2+b^2} = \frac{\pi}{b}\,\mathrm{e}^{-mb}\cos ma$

(j) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos mx\, dx}{x^4+4a^4} = \frac{\pi}{8a^3}\,\mathrm{e}^{-ma}(\cos ma + \mathrm{sen}\, ma)$

(k) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x\, dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{\pi}{a^2-b^2}\left(\frac{\mathrm{e}^{-b}}{b} - \frac{\mathrm{e}^{-a}}{a}\right)$

(l) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(ax^2+2bx+c)^{n+1}} = \frac{\pi(2n)!a^n}{2^n(n!)^2(ac-b^2)^{n+\frac{1}{2}}}$

63. Sean $A, B \in \mathbb{R}$ tales que $A > |B|$.

(a) Demostrar que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{A + B\,\mathrm{sen}\,\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{A^2-B^2}}$.

(b) Sea ahora $\displaystyle I(A) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(A+B\,\mathrm{sen}\,\theta)^2}$. Calcular $I(A)$ por el teorema del residuo y, suponiendo que se puede intercambiar el operador derivada con la integral, calculando $\dfrac{d}{dA}I(A)$.

64. La técnica que se va a emplear en este ejercicio es válida para cualquier potencia entera de las funciones circulares.

(a) Desarrollar y simplificar las dos expresiones distintas de $\mathrm{e}^{3\mathrm{i}z} = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}z})^3$, es decir,

$$\cos(3z) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(3z) \;\; \text{y} \;\; (\cos z + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\, z)^3 \; .$$

(b) Deducir de la parte anterior que $\mathrm{sen}^3\, z = \mathrm{e}^{3\mathrm{i}z} - 3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + 2$.

(c) Usar la identidad de la parte anterior para demostrar que

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{sen}^3\, x}{x^3}\, dx = \frac{3\pi}{8} \; ,$$

usando como contorno de integración el semianillo superior de centro el origen y radios ϵ y R, es decir, la unión de las tres curvas

$$\{\, z \in \mathbb{C} \mid \epsilon \le |\,\mathrm{Re}(z)| \le R \,\} \cup \{\, z \in \mathbb{C} \mid \; \mathrm{Im}(z) > 0 \; , \; |z| = \epsilon \,\} \cup \{\, z \in \mathbb{C} \mid \; \mathrm{Im}(z) > 0 \; , \; |z| = R \,\}$$

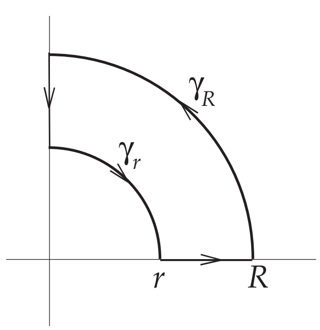
65. Integrando a la función $f(z) = \dfrac{e^{az}}{\cosh \pi z}$ alrededor del rectángulo de lados $x = \pm R$, $y = 0$ y $y = 1$, demostrar que
$$\int_{\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{\cosh \pi x}\, dx = \sec \frac{a}{2} \,.$$
Cambiando luego x por $-x$ y semi-sumando ambas expresiones, deducir que
$$\int_{\infty}^{\infty} \frac{\cosh ax}{\cosh \pi x}\, dx = \sec \frac{a}{2} \,.$$

66. Usando como contorno de integración el rectángulo con vértices $x = \pm R$ y $z = \pm R + i\pi$, demostrar que
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{\cosh x}\, dx = \frac{\pi}{\cosh(\pi/2)} \,.$$

67. Demostrar que
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a \cos x + x \operatorname{sen} x}{x^2 + a^2} = 2\pi\, e^{-a} \quad (a > 0) \,,$$
integrando la función $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z - ia}$ sobre el semicírculo superior $z = R\, e^{i\theta}$, $0 \le \theta \le \pi$ y $-R \le x \le R$, tomando luego $R \to \infty$.

68. † Sea f analítica en el círculo $|z| = r$. Si f se puede separar en parte real e imaginaria en el borde del círculo, es decir:
$$f(r\, e^{ix}) = u(r, x) + iv(r, x) \,,$$
usar la fórmula integral de Cauchy e integración en contornos para demostrar las siguientes relaciones:
$$\int_0^{\infty} u(r,x) \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{\pi}{2a} f(r\, e^{-a}) \qquad \int_0^{\infty} v(r,x) \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2} \left(f(r) - f(0) \right)$$
$$\int_0^{\infty} v(r,x) \frac{x\, dx}{a^2 + x^2} = \frac{\pi}{2} \left(f(r\, e^{-a}) - f(0) \right) \qquad \int_0^{\infty} v(r,x) \frac{dx}{x(a^2 + x^2)} = \frac{\pi}{2a^2} \left(f(r) - f(r\, e^{-a}) \right)$$

69. En este problema, m es real, pero no necesariamente entero, por lo cual cual es necesario recordar que la función Gamma se define como
$$\Gamma(m) = \int_0^{\infty} e^{-t}\, t^{m-1}\, dt \,.$$
Esta función es una generalización del factorial, en el sentido que si $n \in \mathbb{N}$, entonces $\Gamma(n+1) = n!$, como el lector podrá comprobar como un ejercicio de MA-1112, integrando por partes y usando inducción.



(a) Usar la función $f(z) = e^{iz}\, z^{m-1}$ y el contorno dado en la figura adjunta para comprobar que
$$\int_0^{\infty} x^{m-1} \cos x\, dx = \Gamma(m) \cos \frac{m\pi}{2} \,,$$
$$\int_0^{\infty} x^{m-1} \operatorname{sen} x\, dx = \Gamma(m) \operatorname{sen} \frac{m\pi}{2} \,.$$

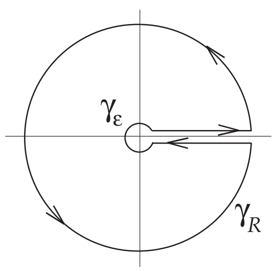
(b) Las *integrales de Fresnel* $SF(x)$ y $CF(x)$ se definen como
$$SF(x) = \int_x^{\infty} \operatorname{sen}(t^2)\, dt \quad \text{y} \quad CF(x) = \int_x^{\infty} \cos(t^2)\, dt \,.$$

Usar un cambio de variable apropiado para expresar $SF(0)$ y $CF(0)$ en términos de las integrales calculadas en la parte anterior y deducir entonces que $SF(0) = CF(0) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

70. Sea ahora $0 < m < 1$ real. Volvemos sobre un problema relativo a la función Gamma que se dió antes sin demostración. Análogamente a la definición de la función Gamma, la *función Beta* se define por alguna de las representaciones

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt = \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}\,dx$$

El lector hará bien en comprobar que las dos integrales son iguales (y por lo tanto cualquiera de las dos sirve como definición), por medio del cambio de variable $t = \dfrac{x}{1+x}$.



(a) Calcular la integral

$$I_m = \int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x}$$

mediante la integración de $f(z) = \dfrac{z^{m-1}}{1+z}$ sobre el contorno de la figura adjunta y tomando el límite cuando $\epsilon \to 0$ y $R \to \infty$. (Nótese que por ser multiforme la potencia z^{m-1}, ésta vale $z^{m-1} = x^{m-1}$ sobre el corte superior del eje real, pero vale $z^{m-1} = (x\,\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}})^{m-1}$ en el corte inferior.) Probar que la integral sobre las curvas γ_ϵ y γ_R tienden a cero y por lo tanto

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x}\,dx + \int_\infty^0 \frac{(x\,\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}})^{m-1}}{1+x} = 2\pi\mathrm{i} \operatorname*{Res}_{z=-1} \frac{z^{m-1}}{1+z}\,,$$

o en forma equivalente, que $(1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}m})I_m = -2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}m}$.

(b) Usando el cambio de variable $x = \dfrac{t}{1-t}$, usar la función Beta para demostrar que $I_m = \Gamma(m)\Gamma(1-m)$.

(c) Usar las dos partes anteriores para demostrar finalmente que

$$\Gamma(m)\Gamma(1-m) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi m}\,,\quad 0 < m < 1\,.$$

Aunque la utilidad de esta fórmula es más bien teórica, ya que $\Gamma(m)$ y $\Gamma(1-m)$ podrían ser *ambos* desconocidos en los cálculos, cuando $m = 1/2$ se llega al conocido resultado $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.